TEMA IV

1. Vectores fijos en el espacio
2. Vectores libres en el espacio
3. Operaciones con vectores libres
4. Producto escalar de dos vectores libres
5. Producto vectorial de dos vectores libres
6. Producto mixto de dos vectores libres

1. Vectores fijos en el espacio

1.1. Definición

Un **<u>sistema de referencia</u>** en el espacio está formado por tres rectas perpendiculares dos a dos con un punto en común O, al que llamaremos origen. En cada una de las tres rectas se elige un sentido positivo y, finalmente, una unidad de medida.

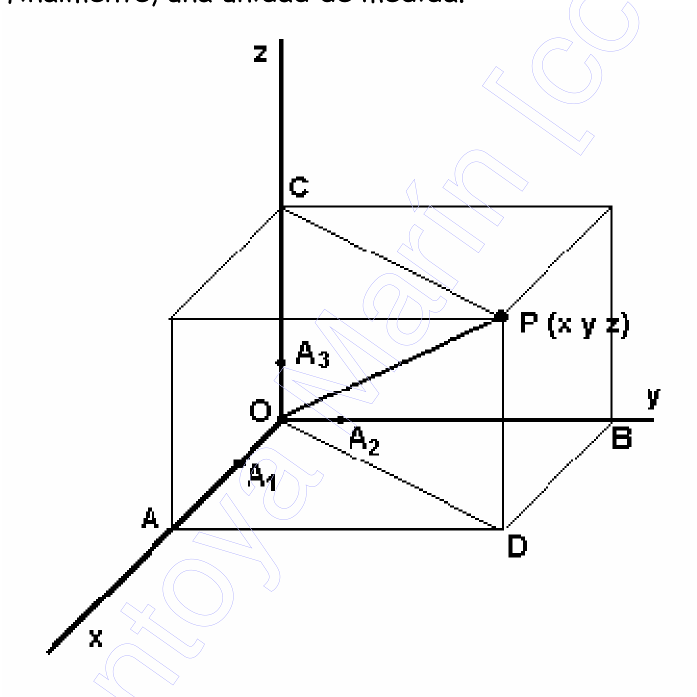


Figura 1

Podemos identificar cualquier punto P del espacio con una terna (x y z) de números reales que se llaman sus coordenadas. Ej. :

O (0 0 0)	A_1 (1 0 0)	A_2 (0 1 0)	A_3 (0 0 1)
A (x 0 0)	B (0 y 0)	C (0 0 z)	D (x y 0)

1.2. Definición

Un **<u>vector fijo</u>** en el espacio es un par ordenado de puntos (A, B) =

A se llama origen B se llama extremo

Si A = B, el vector fijo $\overline{AA}$ se reduce a un punto.

1.3. Definición

Si $A(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ y $B(b_1 \quad b_2 \quad b_3)$, entonces el vector 🗐 tiene por **componentes** $\begin{cases} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_{12} \\ b_3 - a_3 \end{cases}$

Ej. : OA_1 (1 0 0) CP (x y 0) PB (-x 0 -z) BA_3 (0 -y 1)

1.4. Definición

Dos vectores fijos tienen al misma **dirección** si están contenidos en la misma recta o en rectas paralelas. Ej. : AD y BO, OD y CP...

1.5. Definición

Para una misma dirección, dos vectores fijos pueden tener **sentidos** iguales o sentidos opuestos. Ej. : OD y CP → mismo sentido, AD y BO → sentidos opuestos...

1.6. Definición

Se llama **módulo** del vector fijo 🗐 a la longitud del segmento AB, o bien, a la distancia entre los puntos A y B. Se escribe |🗐|.

1.7. Teorema

Si AB (x_1 x_2 x_3) entonces |🗐| = $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ Se obtiene por el teorema de Pitágoras

1.8. Definición

Un vector fijo 🗐 es **unitario** si su módulo vale uno : |🗐| = 1

2. Vectores libres en el espacio

2.1. Definición

Un vector fijo puede trasladarse paralelamente a sí mismo hasta situar su origen en el punto del espacio que más nos interese (así por ejemplo, en la fig. 1 podemos trasladar el vector fijo OD hasta transformarlo en el vector fijo CP). De esta forma conseguimos un conjunto infinito de vectores fijos tales que todos ellos tienen la misma dirección, el mismo sentido, el mismo módulo y las mismas componentes. Ej. : OD (x y 0), CP (x y 0).
Dicho conjunto infinito de vectores fijos se llama **vector libre**.

2.2. Definición

Un vector libre se representa mediante una única letra minúscula para evitar cualquier alusión a orígenes o a extremos. Entonces, si escribimos $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ nos estamos refiriendo a un vector libre y sus componentes x_1, x_2, x_3 son las mismas que las de cualquier vector fijo contenido en $\vec{u}$.
Por ejemplo, si escribimos $\vec{u}(x, y, 0)$ nos estamos refiriendo al vector libre que contiene, entre otros infinitos vectores fijos, a los vectores fijos OD y CP.

2.3. Definición

El vector fijo OA_1 pertenece al vector libre $\vec{e}_1(1,0,0)$.
El vector fijo OA_2 pertenece al vector libre $\vec{e}_2(0,1,0)$.
El vector fijo OA_3 pertenece al vector libre $\vec{e}_3(0,0,1)$.

2.4. Definición

El **vector libre nulo** $\vec{O}(0,0,0)$ contiene a todos los vectores fijos del espacio cuyos orígenes y extremos coinciden, es decir, contiene a todos los puntos del espacio.

3. Operaciones con vectores libres

3.1. Suma de dos vectores libres

Si $\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$ y $\vec{v}(y_1,y_2,y_3)$ son dos vectores libres entonces su suma es el vector libre $\vec{u}+\vec{v}$ que tiene de componentes $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$.

3.2. Interpretación geométrica

Escogemos dos vectores fijos pertenecientes a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ respectivamente tales que extremo del primero coincida con el origen del segundo. Entonces el vector fijo que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del segundo, pertenece al vector libre $\vec{u}+\vec{v}$.
Ejemplo:

$\vec{u}(x-1,y,0)$ $\quad \vec{v}(-x,-y,1)$ $\quad \vec{u}+\vec{v}(-1,0,1)$ $\qquad$ Interpretación :

$A_1D(x-1,y,0)$ $\quad DA_3(-x,-y,1)$ $\quad A_1A_3(-1,0,1)$ → $\quad A_1D+DA_3=A_1A_3$

3.3. Producto de un número real y un vector libre

Si $\lambda \in \Re$ y $\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$ es un vector libre, entonces su producto es el vector libre de componentes $\lambda\vec{u}(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$

3.4. Interpretación geométrica

$$\left.\begin{array}{l} OB(0,y,0) \\ OA_2(0,1,0) \end{array}\right\} \qquad OB = y\cdot OA_2 \qquad (0,y,0)=y\cdot(0,1,0)$$

Escogemos un vector fijo perteneciente a $\vec{u}$. Entonces $\lambda\vec{u}$ contiene a un vector fijo de las siguientes características:

1. Su origen coincide con el origen del vector fijo de $\vec{u}$.
2. Está situado sobre la misma recta que el vector fijo de $\vec{u}$.
3. Su sentido coincide o es opuesto al sentido del vector fijo de $\vec{u}$ según que λ sea mayor o menor que 0.
4. Su módulo es igual al valor absoluto del número λ multiplicado por el módulo del vector de fijo de $\vec{u}$.
5. Se reduce a un punto de despacio cuando $\lambda=0$ o cuando $\vec{u}=0$.

3.5. Teorema

El conjunto de todos los vectores libres del espacio con las operaciones que acabamos de definir se identifica con el **espacio vectorial** $\Re^3$.

3.6. Interpretación geométrica de los conceptos de dependencia e independencia lineal aplicada a los vectores libres del espacio

1. Dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son <u>linealmente dependientes</u> si están situados en la misma recta o en rectas paralelas.
2. Dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son <u>linealmente independientes</u> si están situados sobre rectas que o se cortan o se cruzan.
3. Tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son <u>linealmente dependientes</u> si los tres están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos. Ejemplo: *CP*, *OA*, *OB*.
4. Tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son <u>linealmente independientes</u> si a alguno de ellos está situado sobre una recta que corta al plano que determinan los otros dos. Ejemplo: *OA*, *OB*, *OC*.

4. Producto escalar de dos vectores libres

4.1. Definición

Sean dos vectores libres no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sean dos vectores fijos pertenecientes a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ respectivamente que tengan un origen común. Entonces, en el **<u>ángulo</u>** que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escribe así $(\vec{u},\vec{v})$ y cumple lo siguiente: $0^{\circ} \le (\vec{u},\vec{v}) \le 180^{\circ}$.

4.2. Definición

Decimos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **<u>ortogonales</u>** si $(\vec{u},\vec{v})$= 90. Ejemplo: *OA*, *OB*.
Caso particular
Los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$ son ortogonales dos a dos.

4.3. Definición

Sean dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ libres y no nulos. Su **<u>producto escalar</u>** es un número real que se escribe $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y que se calcula así:
$$\vec{u},\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

4.4. Propiedades del producto escalar

❶ Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ → $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 90^{\circ} = 0$

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0$ $\quad\quad$ $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = 0$ $\quad\quad$ $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 0$

---

❷ $\vec{u}\cdot\vec{u}$ = $|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0^{\circ} = |\vec{u}|^2$ $\quad\quad$ $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$ $\quad\quad$ $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1$ $\quad\quad$ $\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = |\vec{e}_3|^2 = 1$

---

❸ La base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ se llama ortonormal por cumplir la siguiente propiedad :
$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \ne j \end{cases}$$

---

❹ Expresión del producto escalar a partir de las componentes de cada uno de los vectores.
$\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{v}(y_1,y_2,y_3)$, $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e}_2(0,1,0)$, $\vec{e}_3(0,0,1)$

$\vec{u} = x_1\cdot\vec{e}_1 + x_2\cdot\vec{e}_2 + x_3\cdot\vec{e}_3$ $\quad\quad$ $\vec{v} = y_1\cdot\vec{e}_1 + y_2\cdot\vec{e}_2 + y_3\cdot\vec{e}_3$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{matrix} x_1\cdot y_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) + x_1\cdot y_2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + x_1\cdot y_3(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) + \\ x_2\cdot y_1(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1) + x_2\cdot y_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) + x_2\cdot y_3(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) + \\ x_3\cdot y_1(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1) + x_3\cdot y_2(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2) + x_3\cdot y_3(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3) \end{matrix} = \boxed{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3}$$

---

❺ $\vec{u}\cdot\vec{u}>0$ siempre que $\vec{u}\neq\vec{0}$

$\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$ $\quad\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{u}=x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$

❻ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $\quad\quad$ propiedad conmutativa

❼ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ $\quad\quad$ propiedad distributiva

❽ $r\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(r\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(r\cdot\vec{v})$

❾ Cálculo del ángulo que forman dos vectores a partir de sus componentes

$\vec{u},\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$ $\quad\quad$ $\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$ $\quad\quad$ $\vec{v}(y_1,y_2,y_3)$

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)\cdot\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right)}}$$

5. Producto vectorial de dos vectores libres

5.1. Definición

Sean $\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$ y $\vec{v}(y_1,y_2,y_3)$ dos vectores libres. Su **producto vectorial** es otro vector libre que se escribe $\vec{u}\wedge\vec{v}$ y que se calcula así :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=x_2y_3\vec{e}_1+x_3y_1\vec{e}_2+x_1y_2\vec{e}_3+x_2y_1\vec{e}_3+x_1y_3\vec{e}_2+x_3y_2\vec{e}_1=$$

$$(x_2y_3-x_3y_2)\vec{e}_1+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{e}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{e}_3$$

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}(x_2y_3-x_3y_2,\ \ x_3y_1-x_1y_3,\ \ x_1y_2-x_2y_1)}$$

5.2. Propiedades

Nº		Prop. det. Nº...
1	$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\cdot\vec{u}$ (anticonmutativa)	8
2	$\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$	5
3	$(r\cdot\vec{u})\wedge\vec{v}=r\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$	3
4	$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$	9
5	Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.d. → $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$	7
	Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.i. → $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$	

5.3. Interpretación geométrica del vector $\vec{u}\wedge\vec{v}$

Vamos a suponer que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen direcciones distintas, porque si tuvieran la misma, serían linealmente dependientes y entonces $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

1. Dirección de $\vec{u}\wedge\vec{v}$

Puesto que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan un plano, podemos demostrar que la dirección del vector $\vec{u}\wedge\vec{v}$ es perpendicular a dicho plano.

$\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$ $\quad$ $\vec{v}(y_1,y_2,y_3)$ $\quad$ $\vec{u}\wedge\vec{v}(x_2y_3-x_3y_2,\ \ x_3y_1-x_1y_3,\ \ x_1y_2-x_2y_1)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{u}$ $\quad\quad$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{v}$ $\quad\quad$ Demostración :

$\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{u}$ → $\vec{u}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$

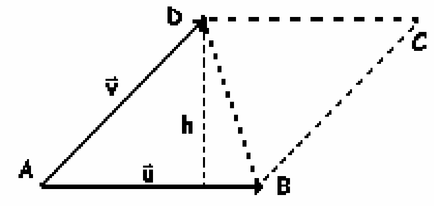
$x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 = \vec{0}$

2. Sentido de $\vec{u} \wedge \vec{v}$
Se basa en el sentido de avance de un sacacorchos que gire desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.

3. Módulo de $\vec{u} \wedge \vec{v}$
$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$

4. Dirección de $\vec{u} \wedge \vec{v}$
Se hace el producto escalar de $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ ó $\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ y da 0, por lo que el vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

5.4. Área del paralelogramo y del triángulo
Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de direcciones distintas. Elegimos dos vectores fijos pertenecientes a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ respectivamente de manera que tengan el mismo origen. Entonces, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan tanto un paralelogramo como un triángulo, según nos interese.



Área del paralelogramo ABCD

$S = |\vec{u}| \cdot h \qquad \operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \qquad h = |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$

$\boxed{S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u} \wedge \vec{v}|}$

Área del triángulo ABD

$\boxed{S = 1/2 \cdot |\vec{u} \wedge \vec{v}|}$

6. Producto mixto de tres vectores libres
6.1. Definición
Sean $\vec{u}(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{v}(y_1,y_2,y_3)$ y $\vec{w}(z_1,z_2,z_3)$ tres vectores libres. Su **producto mixto** es un número real que se escribe así : $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ y que se calcula de la siguiente manera :

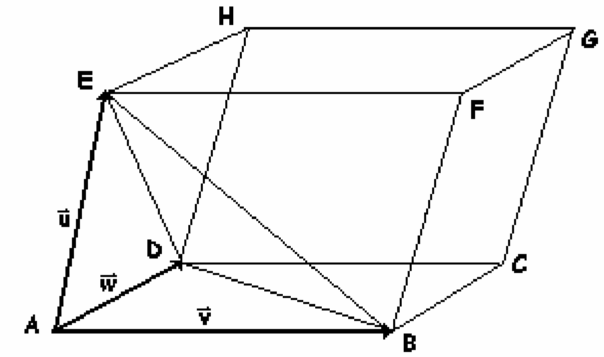
$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}$$

6.2. Propiedades

1	$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$	
2	$[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$	prop. 8 det.
3	$[\vec{u},\vec{v},\vec{0}] = 0$	prop. 5 det.
4	$[r \cdot \vec{u},\vec{v},\vec{w}] = r \cdot [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$	prop. 3 det.
5	$[\vec{u},r \cdot \vec{u},\vec{w}] = 0$	prop. 6 det.
6	Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son l.d. → $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$	
	Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son l.i. → $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$	

6.3. Volúmenes de paralepípedos y de tetraedros

Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ tres vectores linealmente independientes. Elegimos tres vectores fijos pertenecientes a $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ respectivamente, de manera que tengan el mismo origen. Entonces $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ determinan tanto un paralepípedo como un tetraedro, según nos interese.



Volumen del paralepípedo ABCDEFGH :

$V = \left\| [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \right\|$

Volumen del tetraedro ABED

$V = 1/6 \cdot \left\| [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \right\|$