

## TEMA III

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.
2. Sistemas de Cramer. Regla de Cramer.
3. Teorema de Rouché.
4. Sistemas homogéneos.
5. Métodos de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

### 1. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.

#### 1.1. Definición

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de expresiones del siguiente tipo :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Los coeficientes son los números reales  $a_{ij} \begin{cases} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{cases}$

Los términos independientes son los números reales  $b_i \{ i = 1 \dots m \}$

Las incógnitas se representan por  $x_j \{ j = 1 \dots n \}$

#### 1.2. Observación

El sistema anterior se puede escribir en forma matricial poniendo  $A \cdot X = B$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m \times n \qquad \qquad n \times 1 \qquad \qquad m \times 1$

#### 1.3. Ejemplo

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 8 \\ x + y - 2z &= -6 \\ 4x - 11y + 7z &= 36 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix}$$

#### 1.4. Definición

Se llama solución del sistema  $A \cdot X = B$  a toda matriz  $S \in M(n \times 1)$  que cumpla  $A \cdot S = B$ .

#### 1.5. Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{solución del sistema anterior, y } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix}$$

### 1.6. Definición

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

### 1.7. Teorema

Un sistema se convierte en otro equivalente si sobre las ecuaciones del primer sistema se realiza alguna de las llamadas transformaciones elementales ; que son :

- ❶ Permutar dos ecuaciones.
- ❷ Multiplicar una ecuación por un número real distinto de 0.
- ❸ Sumar a una ecuación otra ecuación multiplicada por un número real.

### 1.8. Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = -8 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 2x - 3y = -8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -3x + y = -2 \\ 2x - 3y = -8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -3x + y = -2 \\ 10x - 15y = -40 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -3x + y = -2 \\ 10x - 12y = -46 \end{array} \right\}$$

## 2. Sistemas de Cramer. Regla de Cramer

### 2.1. Definición

Un sistema de ecuaciones lineales  $A \cdot X = B$  es **de Cramer** si la matriz  $A$  es cuadrada y tiene inversa, es decir  $\begin{cases} \text{existe } |A| \\ |A| \neq 0 \end{cases}$

### 2.2. Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ 3x + y - z = 4 \\ -2x + y - 2z = 2 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

### 2.3. Teorema

Un sistema de Cramer tiene una única solución que se calcula así :  $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad (A^{adj})^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & 3/12 & -1/12 \\ -8/12 & 0 & -4/12 \\ -5/12 & -3/12 & -7/12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/12 & 3/12 & -1/12 \\ -8/12 & 0 & -4/12 \\ -5/12 & -3/12 & -7/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### 2.4. Regla de Cramer

Es un método para resolver sistemas de Cramer que nos evita el cálculo de  $A^{-1}$ . Además permite calcular cada incógnita independientemente de las demás. Dice lo siguiente :

"La incógnita número h ( $X_h$ ) es igual al cociente de los determinantes de las matrices  $A_h$  y  $A$ , donde  $A_h$  es la matriz que se obtiene al sustituir en  $A$  la columna número h por la columna de los términos independientes."

$$X_h = \frac{|A_h|}{|A|}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ 3x + y - z = 4 \\ -2x + y - 2z = 2 \end{array} \right\} x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-12} = 1$$

### 3. Teorema de Rouché

#### 3.1. Definición

Un sistema se llama **compatible determinado** (S.C.D.) si tiene una única solución. Se llama **compatible indeterminado** (S.C.I.) si tiene infinitas soluciones. Se llama **incompatible** (S.I.) si no tiene soluciones.

#### 3.2. Definición

Si  $A \cdot X = B$  es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ se llaman respectivamente } \underline{\text{matriz de}}$$

**los coeficientes** y **matriz ampliada** (ó A estrella).

#### 3.3. Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 8 \\ x + y - 2z = -6 \\ 4x - 11y + 7z = 36 \end{array} \right\} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & -6 \\ 4 & -11 & 7 & 36 \end{array} \right)$$

#### 3.4. Teorema de Rouché

Supongamos que  $A \cdot X = B$  es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Supongamos que  $\text{rg}A = r$ .

1. Si  $\text{rg}A^* = r + 1 \Leftrightarrow$  S.I.

2. Si  $\text{rg}A^* = r \Leftrightarrow$  S.C.

a) Si  $r = n \Leftrightarrow$  S.C.D.

b) Si  $r < n \Leftrightarrow$  S.C.I.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{tiene } n - r \text{ grados de libertad} \\ r \text{ incógnitas dependen de las } n - r \text{ incógnitas} \end{array} \right.$

## 4. Sistemas homogéneos

### 4.1. Definición

Un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas se llama **homogéneo** si todos los términos independientes son ceros. Matricialmente se escribe así :  $A \cdot X = 0$

### 4.2. Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ 7x + 4y + 6z = 0 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 4.3. Teorema

Todo sistema homogéneo es compatible.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right) \quad \text{rg}A = \text{rg}A^*$$

## 5. Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

### 5.1. Método de Gauss

Consiste en aplicar alguna de las transformaciones elementales a las filas de la matriz ampliada  $A^*$  del sistema que nos dan para conseguir un nuevo sistema equivalente al primero y que será sencillo de resolver puesto que la nueva matriz ampliada estará escalonada por filas.

### 5.2. Observaciones

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y - 2z = 3 \\ 17x - 14y + 6z = 8 \\ 32x + 2y - 39z = 5 \end{array} \right\} \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -2 & 3 \\ 17 & -4 & 6 & 8 \\ 32 & 2 & -34 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} y & x & z \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 3 \\ -4 & 17 & 6 & 8 \\ 2 & 32 & -34 & 5 \end{array} \right) \end{matrix}$$

1. Puedes cambiar el orden de las columnas con excepción de la última, pero debes apuntar el cambio de orden de las incógnitas.
2. Puedes suprimir cualquier fila nula.