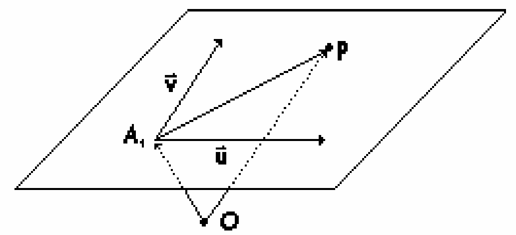
TEMA V

1. Ecuaciones del plano
2. Ecuaciones de la recta
3. Haz de planos
4. Incidencia de planos y rectas
5. Ángulos en el espacio
6. Condiciones de perpendicularidad
7. Distancias en el espacio

1. Ecuaciones del plano

1.2. Ecuación vectorial del plano

Un plano queda determinado por tres puntos no alineados, o lo que es lo mismo, por un punto A_1 y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes, puesto que están en rectas que se cortan. Vamos a suponer que las coordenadas de A_1 son (x_1, y_1, z_1), y vamos a suponer que las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. El punto O es, como siempre, el origen de coordenadas, luego O(0,0,0).
Pensemos en un punto cualquiera P(x,y,z) que esté en el plano.



$\overline{A_1P}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.d., por lo tanto existen números reales λ y μ tales que $\overline{A_1P} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

$\overline{OP} = \overline{OA_1} + \overline{A_1P}$ $\qquad$ $\overline{OP} = \overline{OA_1} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) + (\mu v_1, \mu v_2, \mu v_3)}$$

1.2. Ecuaciones paramétricas del plano

$$\boxed{x = x_1 + \lambda u_1 + \mu v_1}$$
$$\boxed{y = y_1 + \lambda u_2 + \mu v_2}$$
$$\boxed{z = z_1 + \lambda u_3 + \mu v_3}$$

1.3. Ecuación general del plano

Rango $\{\overline{A_1P}, \vec{u}, \vec{v}\} = 2$ $\qquad$ $\overline{A_1P}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$$Rg\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ (se obtiene resolviendo el determinante)

1.4. Teorema

1. Si un plano está determinado por un punto A_1 y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes, entonces el vector $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular al plano.

2. Si un plano viene dado por su ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$, entonces el vector $\vec{n}(A, B, C)$ es perpendicular al plano.

1.5. Escribe todo lo que sepas acerca del plano que pasa por los puntos $A_1(2,-1,3)$, $A_2(0,3,-2)$ y $A_3(5,2,7)$

$\vec{u}(-2,4,-5)$ $\qquad$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -2 & 4 & -5\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=(31,-7,-18)$

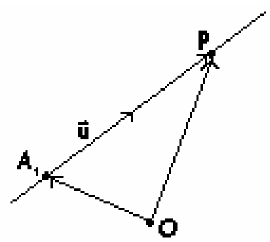
$$(x,y,z)=(2,1,3)+(-2\lambda,4\lambda,-5\lambda)+(3\mu,3\mu,4\mu) \qquad \begin{aligned} x&=2-2\lambda+3\mu\\ y&=-1+4\lambda+3\mu\\ z&=3-5\lambda+4\mu\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-3\\ -2 & 4 & -5\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad 31x-7y-18z-15=0$$

2. Ecuaciones de la recta

Una recta queda determinada por dos puntos distintos, o lo que es lo mismo, por un punto A_1 y por un vector $\vec{u}\neq\vec{0}$. Sea $A_1(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$.

Elegimos un punto cualquiera $P(x,y,z)$ de la recta. Sabemos que las coordenadas del origen son O(0,0,0). Unimos el origen con A_1 y con P. También formamos el vector $\overline{A_1P}$.



$\overline{A_1P}$ y $\vec{u}$ son linealmente dependientes por estar en la misma recta. Existe algún número real λ tal que $\overline{A_1P}=\lambda\vec{u}$.

$\overline{OP}=\overline{OA_1}+\overline{A_1P}$

$$\boxed{\overline{OP}=\overline{OA_1}+\lambda\vec{u}}$$

2.1. Ecuación vectorial de la recta

$$\boxed{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)}$$

2.2. Ecuaciones paramétricas de la recta

$$\boxed{x=x_1+\lambda u_1}$$
$$\boxed{y=y_1+\lambda u_2}$$
$$\boxed{z=z_1+\lambda u_3}$$

2.3. Ecuación continua de la recta

Rango $\{\overline{A_1P},\vec{u},\}=1$ $\qquad$ $\overline{A_1P}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$

$$Rg\begin{pmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}=1 \quad\rightarrow\quad \boxed{\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}}$$

2.4. Di todo lo que sepas acerca de una recta que pasa por los puntos $A_1(2,4,-3)$ y $A_2(3,1,4)$

$\vec{u}(1,-5,7)$ $\quad (x,y,z)=(2,4,-3)+(\lambda,-5\lambda,7\lambda)$

$$\begin{aligned} x&=2+\lambda \\ y&=4-5\lambda \\ z&=-3+7\lambda \end{aligned} \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+3}{7}$$

2.5. La recta como intersección de dos planos

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+3}{7} \rightarrow \quad \begin{aligned} -5x+10=y-4 \quad &\Rightarrow \quad 5x+y-14=0 \\ 7x-14=z+3 \quad &\Rightarrow \quad 7x-z-17=0 \end{aligned}$$

Vector ortogonal al primer plano : $\vec{n}_1(5,1,0)$

Vector ortogonal al segundo plano : $\vec{n}_2(7,0,-1)$

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,5,-7) \qquad \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{u}(1,-5,7)$$

Toda recta es el corte de dos planos siempre que estos no sean ni paralelos ni coincidentes. El vector que marca la dirección de la recta ($\vec{u}$) se obtiene mediante el <u>producto vectorial</u> de los vectores ortogonales a ambos planos.

3. Haz de planos

Tenemos dos planos que se cortan. Su intersección es una recta.

$$\left.\begin{aligned} \pi:\ & Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi':\ & A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{aligned}\right\} \quad \pi \cap \pi' = r$$

El conjunto de ecuaciones $Ax+By+Cz+D+\lambda(A'x+B'y+C'z+D')=0$, donde $\lambda=r$, representa el conjunto de todos los planos del **<u>haz</u>** que determinan los planos π y π'.

4. Incidencia de planos y rectas

4.1. Incidencia de dos planos

Sean los planos $\pi:\ Ax+By+Cz+D$ y $\pi':\ A'x+B'y+C'z+D'$. Su intersección está formada por todos aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen a la vez las dos ecuaciones, es decir, por las soluciones del siguiente sistema :

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D \\ A'x+B'y+C'z+D' \end{cases} \qquad \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}}_{M} \left| \begin{matrix} -D \\ -D' \end{matrix} \right)}_{M^*}$$

Se pueden dar las siguientes posibilidades :

❶ Rg M = Rg M* = 2 → S.C.I. con un grado de libertad → π y π' se cortan formando una recta ; los infinitos puntos de la recta son las infinitas soluciones del sistema.

❷ Rg M = 1 Rg M* = 2 → S.I. → $\pi \parallel \pi'$

$$\pi \parallel \pi' \text{ si } \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$$

❸ Rg M = Rg M* = 1 → S.C.I. con dos grados de libertad → $\pi = \pi'$

π = π' si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$

4.2. Incidencia de tres planos

Sean los planos π: $Ax + By + Cz + D$, π': $A'x + B'y + C'z + D'$ y π'': $A''x + B''y + C''z + D''$. Su intersección está formada por todos aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen a la vez las tres ecuaciones, es decir, por las soluciones del siguiente sistema :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D \\ A'x + B'y + C'z + D' \\ A''x + B''y + C''z + D'' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$$

$$M \qquad M^*$$

Se pueden dar las siguientes posibilidades :

❶ Rg M = Rg M* = 3 → S.C.D. → π, π' y π'' forman un triedro. Las coordenadas del único punto en común son la única solución del sistema.

❷ Rg M = 2 Rg M* = 3 → S.I. → π, π' y π'' no tienen ningún punto en común. Esto ocurre porque la intersección de dos de los planos es una recta paralela al tercer plano. Puede ser que dos de los planos sean paralelos, o bien, que los tres planos formen un prisma triangular.

❸ Rg M = Rg M* = 2 → S.C.I. con un grado de libertad → π, π' y π'' tienen una recta por intersección.

❹ Rg M = 1 Rg M* = 2 → S.I. → π, π' y π'' son paralelos, pudiendo haber dos superpuestos.

❺ Rg M = Rg M* = 1 → S.C.I. con dos grados de libertad → π = π' = π''.

4.3. Incidencia de una recta y un plano

El problema se puede plantear de dos formas :

$\boxed{a}$ $r = \pi' \cap \pi'' \;\Rightarrow\; r \cap \pi \;\Rightarrow\; \pi \cap \pi' \cap \pi''$

El problema ya está resuelto, pero de los cinco casos anteriores sólo se pueden dar los tres primeros, que se traducen de la siguiente forma :

❶ r y π se cortan en un punto.

❷ r ⊠ π

❸ r está contenida en el plano π.

$\boxed{b}$ $\quad r \begin{cases} A_1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases} \qquad \pi \begin{cases} B_1 \\ \vec{v}, \vec{w} \quad ambos \quad l.i. \end{cases}$

❶ $Rg\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 3$ → r y π se cortan en un punto.

❷ $\left.\begin{matrix} Rg\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 2 \\ Rg\{B_1A_1, \vec{v}, \vec{w}\} = 3 \end{matrix}\right\}$ → r ⊠ π

❸ $\left.\begin{matrix} Rg\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 2 \\ Rg\{B_1A_1, \vec{v}, \vec{w}\} = 2 \end{matrix}\right\}$ → r está contenida en el plano π.

4.4. Incidencia de dos rectas

$\boxed{a}$ $\left.\begin{matrix} r = \pi_1 \cap \pi_2 \\ r' = \pi_3 \cap \pi_4 \end{matrix}\right\} \quad r \cap r' = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$

$$\begin{cases} \pi_1: & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2: & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3: & A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ \pi_4: & A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{pmatrix}$$

La intersección de r y r' está formada por aquellos puntos cuyas coordenadas (x,y,z) satisfacen a la vez las cuatro ecuaciones anteriores.

❶ Rg M = 3 Rg M* = 4 → S.I. → r y r' se cruzan
❷ Rg M = 3 Rg M* = 3 → S.C.D. → r y r' se cortan
❸ Rg M = 2 Rg M* = 3 → S.I. → r ∥ r'
❹ Rg M = 2 Rg M* = 2 → S.C.I. con un grado de libertad → r = r'

$\boxed{b}$ $\quad r \begin{cases} A_1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases} \qquad r' \begin{cases} B_1 \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$

❶ $\left.\begin{array}{r} Rg\{\vec{u},\vec{v}\} = 2 \\ Rg\{\vec{u},\vec{v},B_1A_1\} = 3 \end{array}\right\}$ → r y r' se cruzan

❷ $\left.\begin{array}{r} Rg\{\vec{u},\vec{v}\} = 2 \\ Rg\{\vec{u},\vec{v},B_1A_1\} = 2 \end{array}\right\}$ → r y r' se cortan

❸ $\left.\begin{array}{r} Rg\{\vec{u},\vec{v}\} = 1 \\ Rg\{\vec{u},\vec{v},B_1A_1\} = 2 \end{array}\right\}$ → r ∥ r'

❹ $\left.\begin{array}{r} Rg\{\vec{u},\vec{v}\} = 1 \\ Rg\{\vec{u},\vec{v},B_1A_1\} = 1 \end{array}\right\}$ → r = r'

5. Ángulos en el espacio

5.1. Ángulo entre dos rectas r y r' (α)

$r: \ \vec{u}(u_1, u_2, u_3)$
$r': \ \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)\cdot\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)}}$$

5.2. Ángulo entre dos planos π y π' (α)

$\pi: \ \vec{m}(m_1, m_2, m_3)$
$\pi': \ \vec{n}(n_1, n_2, n_3)$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3|}{\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}\right)\cdot\left(\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}\right)}}$$

5.3. Ángulo entre un plano π y una recta r (α)

$\pi: \ \vec{m}(m_1, m_2, m_3)$
$r: \ \vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{u}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3|}{\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}\right)\cdot\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)}}$$

6. Condiciones de perpendicularidad

6.1. Perpendicularidad entre dos rectas r y r'

$r: \ \vec{u}(u_1, u_2, u_3)$
$r': \ \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

r⊥r' → $\vec{u} \perp \vec{v}$ → $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ → $\boxed{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0}$

6.2. Perpendicularidad entre dos planos π y π'

$\pi: \ \vec{m}(m_1, m_2, m_3)$
$\pi': \ \vec{n}(n_1, n_2, n_3)$

$\pi \perp \pi'$ → $\vec{m} \perp \vec{n}$ → $\vec{m}\cdot\vec{n} = 0$ → $\boxed{m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 = 0}$

6.3. Perpendicularidad entre un plano π y una recta r

π: $\vec{m}(m_1, m_2, m_3)$
r: $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

$\pi \perp$r → $\vec{m} \parallel \vec{u}$ → $Rg\{\vec{m}, \vec{u}\} = 1$ → $\boxed{\dfrac{m_1}{u_1} = \dfrac{m_2}{u_2} = \dfrac{m_3}{u_3}}$

7. Distancias en el espacio

7.1. Distancia entre dos puntos : A_1 y B_1

① $A_1 = B_1$ → $d = 0$

② $A_1 \neq B_1$ → $d = \left|\overline{A_1 B_1}\right|$

7.2. Distancia entre un punto A_1 y un plano π $\begin{cases} B_1 \\ \vec{n} \end{cases}$

① $A_1 \in \pi$ → $d = 0$

② $A_1 \notin \pi$ → $d = \dfrac{\left|\overline{A_1 B_1} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$

7.3. Distancia entre un punto A_1 y una recta r $\begin{cases} B_1 \\ \vec{u} \end{cases}$

① $A_1 \in r$ → $d = 0$

② $A_1 \notin r$ → $d = \dfrac{\left|\overline{A_1 B_1} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$

7.4. Distancia entre dos rectas : r $\begin{cases} A_1 \\ \vec{u} \end{cases}$ y r' $\begin{cases} B_1 \\ \vec{v} \end{cases}$

① Si r = r' ó si r y r' se cortan → $d = 0$

② Si r ∥ r' → $d = d(A_1 \;\; r') = d(B_1 \;\; r)$

③ Si r y r' se cruzan → $d = \dfrac{\left|\left[\overline{A_1 B_1}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$

7.5. Distancia entre una recta r $\begin{cases} A_1 \\ \vec{u} \end{cases}$ y un plano π $\begin{cases} B_1 \\ \vec{n} \end{cases}$

① Si r está contenida en π o si r y π se cortan → $d = 0$

② Si r ∥ π → $d = d(A_1 \;\; \pi)$

7.6. Distancia entre dos planos : π $\begin{cases} A_1 \\ \vec{n} \end{cases}$ y π $\begin{cases} B_1 \\ \vec{m} \end{cases}$

① Si π = π' ó si π y π' se cortan → $d = 0$

② Si π ∥ π' → $d = d(A_1 \;\; \pi') = d(B_1 \;\; \pi)$

* Los vectores $\vec{m}$ y $\vec{n}$ siempre son perpendiculares a sus respectivos planos.