TEMA II

1. Espacio vectorial de matrices m×n
2. Producto de matrices. Matrices inversibles
3. Rango de una matriz
4. Determinantes de orden • 3. Propiedades
5. Determinantes de orden > 3
6. Cálculo de matrices inversas mediante determinantes
7. Métodos de cálculo del rango de una matriz

1. Espacio vectorial de matrices m×n

1.1. Definición

Una **matriz m×n** es un cuadro de m×n números reales distribuidos en m filas y n columnas. Se puede representar de las formas siguientes :

$$A = a_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ej. : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $a_{21}= 4$ $a_{13}=3$

El conjunto de todas las matrices m×n se representa así : M(m×n). *Ej. : A* $\overline{}$*M(2×3)*

Dos matrices m×n son iguales tan sólo si en cada lugar (i,j) tienen el mismo número. *Ej. :*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2. Definición

Una matriz 1xn se llama matriz fila. *Ej. : (-1 0 3 4 -3)*

Una matriz mx1 se llama matriz columna. *Ej. :* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Una matriz n×n se llama matriz cuadrada de orden n. *Ej. :* $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

1.3. Definición

Una matriz m×n se llama **matriz nula** si está formada exclusivamente por ceros. Se representa así : $0_{m\times n}$

Si A es m×n, se llama **matriz opuesta** de A, y se escribe -A, a la matriz m×n cuyo elemento (i,j) es $-a_{ij}$. *Ej. :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

1.4. Definición

Si A y B son dos matrices m×n se llama **suma** de A y B y se escribe A+B, a la matriz m×n cuyo elemento (i,j) es $a_{ij} + b_{ij}$.

$$\textit{Ej. :}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

1.5. Definición

Si t ∈ R y si A es m×n, se llama **producto** de t y A, y se escribe t·A, a la matriz m×n cuyo elemento (i,j) es $t \cdot a_{ij}$.

$$\textit{Ej. : -3}\cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 15 \\ 3 & -6 & -9 \\ 6 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

1.6. Teorema

El conjunto M(m×n) con las operaciones que acabamos de definir es un espacio vectorial donde los vectores pasan a ser matrices m×n. La dimensión de este espacio vectorial es m×n.

Base canónica de M(2x3)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7. Definición

Sea A m×n. Se llama **traspuesta** de A a la matriz n×m tal que en la posición (i,j) tiene el elemento a_{ji}. A esta matriz se la escribe A^t.

1.8. Definición

Sea A ∈ M(m×n). Los números reales que están situados en las posiciones (i,i) forman la **diagonal principal** de la matriz A.

$$\textit{Ej. :}\quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

1.9. Definición

Una matriz m×n se llama **triangular superior** si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\textit{Ej. :}\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Observación : una matriz escalonada por filas es un caso particular de triangular superior.

1.10. Definición

Una matriz m×n se llama **<u>triangular inferior</u>** si todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

Ej. : $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.11. Definición

Se dice que una matriz A es **<u>simétrica</u>** si se cumple que $A = A^t$. Esto sólo puede ocurrir si A es una matriz cuadrada de orden n y además $a_{i,j} = a_{j,i} \ \forall \ i,j$

Ej. : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2. Producto de matrices. Matrices inversibles.

2.1. Definición

Se llama **<u>matriz unidad</u>** de orden n y se escribe I_n a la matriz cuadrada de orden n cuyos elementos (i,j) son $\begin{cases} 1 \to i = j \\ 0 \to i \neq j \end{cases}$

Ej. : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2. Definición

A ¯M(m×n) y B ¯M(m×p). Se llama **<u>matriz producto</u>** de A y B, y se escribe AB, a la matriz de m filas y p columnas cuyo elemento (i,j) se obtienen así : $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{n1}b_{nj}$. Para que exista AB debe cumplirse que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

Ej. : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 & -2 \\ 6 & -8 & 5 & 1 \\ -4 & 22 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2.3. Propiedades del producto de matrices

1	A(BC) = (AB)C	Siempre que los productos BC y AB existan simultáneamente
2	$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$	Para cualquier matriz cuadrada A de orden n
3	r(AB) = (rA)B	$\forall r$ y siempre que exista AB
4	A(B + C) = AB + AC	Siempre que exista AB ó AC

5	- No siempre existen simultáneamente AB y BA Ej. : $\left.\begin{array}{l} A\in M(2\times 3) \\ B\in M(3\times 4)\end{array}\right\} \begin{array}{l} AB\in M(2\times 2) \\ BA \quad no \quad existe\end{array}$ - En los casos en los que sí existen simultáneamente AB y BA se cumple, en general, que AB ♑ BA Ej. : $\left.\begin{array}{l} A\in M(2\times 3) \\ B\in M(3\times 2)\end{array}\right\} \begin{array}{l} AB\in M(2\times 2) \\ BA\in M(3\times 3)\end{array}$ AB ♑ BA - Aún en el caso de que AB y BA existan simultáneamente y coinciden en número de filas y de columnas se cumple, en general, que AB ♑ BA Ej. : $\left.\begin{array}{l} A\in M(2\times 2) \\ B\in M(2\times 2)\end{array}\right\} \begin{array}{l} AB\in M(2\times 2) \\ BA\in M(2\times 2)\end{array}$ ¿AB = BA ? Ej. : A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

2.4. Definición

A ¯M(m×n). Se dice que A es **inversible** o **regular** si existe otra matriz A^{-1} ¯M(n×n), llamada inversa de A, que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Ej. :

A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es regular A^{-1} = $\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5. Existencia de matrices cuadradas que no tienen inversa

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ Si existiera A^{-1} se cumpliría que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a-2c=1 & \rightarrow \quad a-2c=1 \\ -3a+6c=0 & \rightarrow \quad a-2c=0 \\ b-2d=0 & \rightarrow \quad b-2d=0 \\ -3b+6d=1 & \rightarrow \quad b-2d=-1/3 \end{cases}$$

Si una matriz no tiene inversa se llama **singular** o **no inversible**.

3. Rango de una matriz

3.1. Definición

Se llama **rango** de un conjunto de **vectores** al máximo número de vectores linealmente independientes que podemos encontrar en ese conjunto.

3.2. Observación

Si A ¯M(m×n) $\begin{cases} las \quad m \quad filas \quad son \quad m \quad vectores \quad de \quad R^n \\ las \quad n \quad columnas \quad son \quad n \quad vectores \quad de \quad R^m \end{cases}$

3.3. Teorema

Si A ¯M(m×n), entonces el rango de sus m vectores fila coincide con el rango de sus n vectores columna.

3.4. Definición

Si A ¯M(m×n), se llama **rango** de A, y se escribe rgA, al rango de sus filas o al rango de sus columnas.

4. Determinantes de orden ≤ 3. Propiedades.

4.1. Definición

Sea A ¯M(n×n) con n ≤ 3. Su determinante es un número asociado a ella que se escribe |A| y que se calcula de la siguiente manera :

1	A ¯M(1×1)	A = $\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$	|A| = a_{11}
	Ej. :	A = $\begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix}$	|A| = - 7
2	A ¯M(2×2)	A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	|A| = $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$
	Ej. :	A = $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	|A| = 10 - (- 12) = 22
3	A ¯M(3×3)	A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	Regla de Sarrus |A| = $\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{matrix}$
	Ej. :	A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	|A| = - 4 - 42 + 20 - 2 -30 - 56 = - 144

4.2. Propiedades de los determinantes

Las siguientes propiedades también son válidas para determinantes de orden > 3.

❶ Si A ¯M(n×n) : |A| = |A^t|. Ej. :

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ = - 12 + 8 + 0 - 0 - 8 - 20 = - 32

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = - 12 + 0 + 8 - 0 - 8 - 20 = - 32

Por lo tanto, si en una futura propiedad se habla de filas, también se podría haber hablado de columnas.

❷ Si A ¯M(n×n) y B ¯M(n×n) : |AB| = |A| · |B|

Ej. :

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ AB = $\begin{pmatrix} -12 & -14 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}$

|A| = 7 |B| = - 22 |AB| = - 154

---

❸ Si una fila de una matriz cuadrada se multiplica por un número real, su determinante queda multiplicado por dicho número. Ej. :

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 0 + 5 + 12 - 0 - 8 - 2 = 7

$\begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 0 + 15 + 36 - 0 - 24 - 6 = 21

---

❹ Si r ¯R y A ¯M(n×n) : |rA| = r^n · |A|

Ej. :

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ = - 8 + 0 + 3 - 0 - 12 - 12 = - 29

$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ = 2^3 · (- 24) = - 232

---

❺ Si una fila de una matriz cuadrada está formada exclusivamente por ceros, entonces el determinante vale cero. Ej. :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0

---

❻ Si dos filas de una matriz cuadrada son proporcionales (en particular, iguales) el determinante vale cero. Ej. :

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ = 0 + 3 + 18 - 18 - 3 - 0 = 0

---

❼ **Si A ∈ M(n×n) sus n filas son vectores de R^n que cumplen lo siguiente** :

$$\begin{cases} son \quad l.d. \Leftrightarrow |A| = 0 \\ son \quad l.i. \Leftrightarrow |A| \neq 0 \end{cases}$$

Ej. : (3, 1, 2) (1,1,-1) y (6,4,-1) son l. d. :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 8 - 12 + 1 + 12 = 0 \qquad \vec{u}_3 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$

---

❽ **Si se intercambian las filas de una misma matriz cuadrada, el determinante cambia de signo**. Ej. :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 8 - 24 - 0 - 8 = -46$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 24 + 8 - 0 + 6 + 8 = 46$$

---

❾ **Si varios determinante tienen iguales todas sus filas excepto una, se cumple lo siguiente** :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-33 \quad + \quad 27 \quad + \quad 24 \quad = \quad 18$$

---

❿ **Si una fila de una matriz cuadrada se sustituye por la que resulta de sumar a dicha fila otras filas multiplicadas por un número cualquiera, el determinante no varía**. Ej. :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 0 - 3 - 0 + 4 = 1$$

Sustituyo 3ª f → 3ª f + 2 · 1ª f + 1 · 2ª f

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 10 + 0 - 15 - 0 + 8 = 1$$

5. Determinantes de orden > 3

5.1. Definición

Si A ∈ M(n×n) se llama **<u>menor complementario</u>** del elemento a_{ij} al determinante de la submatriz cuadrada que se obtiene al suprimir en A la fila i y la columna j. Se representa M_{ij}.

5.2. definición

Si $A \in M(n\times n)$ se llama **adjunto** del elemento a_{ij} al siguiente número : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Ej. : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad M_{14} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 40 - 0 + 8 - 12 = -45$

$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot (-45) = 45$

5.3. Teorema

Si $A \in M(n\times n)$, el determinante de A se puede calcular a partir de al fila i mediante la siguiente fórmula :

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

También se puede calcular a partir de la columna j mediante la siguiente fórmula :

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Este teorema nos permite calcular el determinante de A a partir de los elementos y los adjuntos de una cualquiera de sus líneas, lo que se simplifica con al aplicación de la propiedad nº 10 anterior. Ej. :

$$\begin{vmatrix} 7 & -15 & 8 \\ 6 & 13 & 4 \\ -9 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 15 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -7 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-111) + 15 \cdot (-6) + 8 \cdot (147) = 309$$

6. Cálculo de matrices inversas mediante determinantes

6.1. Definición

Si $A \in M(n\times n)$ se llama **matriz adjunta** de A a al matriz $A^{adj} \in M(n\times n)$ que resulta al cambiar en A cada elemento por su adjunto . Ej. :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A^{adj} = \begin{pmatrix} 11 & -9 & -7 \\ 16 & 0 & -8 \\ -17 & 3 & 13 \end{pmatrix}$

6.2. Teorema

Si $A \in M(n\times n)$ y $|A| \neq 0$ entonces existe A^{-1}, que se calcula así : $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \left(A^{adj}\right)^t$

Ej. : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 6 - 45 - 8 - 6 + 72 + 5 = 24$

$(A^{adj})^t = \begin{pmatrix} 11 & 16 & -17 \\ -9 & 0 & 3 \\ -7 & -8 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/24 & 16/24 & -17/24 \\ -9/24 & 0 & 3/24 \\ -7/24 & -8/24 & 13/24 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11/24 & 16/24 & -17/24 \\ -9/24 & 0 & 3/24 \\ -7/24 & -8/24 & 13/24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Métodos de cálculo del rango de una matriz

7.1. Método de Gauss

Sea A $\in$ M(m×n). Como sabemos, el rango de A es igual al rango de sus m filas. Por lo tanto, mediante transformaciones elementales, convertimos A en una matriz escalonada por filas y entonces el rango de A será el número de filas no nulas de la matriz escalonada.

7.2. Método de los Menores

Sea A $\in$ M(m×n). Definición :

Los menores de A son los determinantes de las diferentes submatrices cuadradas de A. Se llama orden de uno de esos menores al número de sus filas o de sus columnas.

Teorema

El rango de A coincide con el orden de un menor no nulo, siempre que todos los menores de orden superior al anterior sean nulos.

Cálculo práctico del rango de A

1. Se elige un elemento no nulo de A. Ya está asegurado que el rago de A es, al menos, uno.
2. Orlamos dicho menor de orden uno. Esto consiste en formar todos los menores posibles de orden dos añadiéndole al anterior otra fila y otra columna. Si alguno de los menores así formados es no nulo, el rango de A es, al menos, dos.
3. Repetimos este proceso hasta encontrar un menor no nulo de orden h, tal que todos los menores de orden h + 1 que se obtengan orlando el anterior sean nulos ; en cuyo caso se cumplirá : rgA = h.

Ej. :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \\ -10 & 6 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \\ -10 & 6 & 14 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rgA es al menos 1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \\ -10 & 6 & 14 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{rgA es al menos 2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \\ -10 & 6 & 14 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ -10 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \\ -10 & 6 & 14 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -10 & 14 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

rgA < 3 → rgA = 2