TEMA 1: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. Momento angular
2. Dos cuerpos en interacción
   a) Centro de masas
   b) Comportamiento dinámico
3. Modelos planetarios. Historia.
4. Leyes de Kepler
5. Ley de gravitación universal
6. Fuerzas conservativas: energía potencial
7. Energía mecánica: conservación y variación
8. Campo gravitatorio terrestre
9. Movimientos de cuerpos sometidos a fuerzas gravitatorias: cohetes, satélites, gravedad en otros planetas.

1. Momento angular

Tenemos una partícula en movimiento con posición y velocidad variable.
Se define el **momento angular** ($\vec{L}$) respecto de esa partícula, como el producto vectorial de la posición por el producto masa - velocidad :

$$\vec{L} = \vec{r} \% m\vec{v} = m\,(\vec{r} \% \vec{v})$$

Para ver como varía el momento angular respecto al tiempo, se deriva :

$$\vec{L}\,' = (\vec{r} \% m\vec{v}\,') + (\vec{r}\,' \% m\vec{v}) = (\vec{r} \% m\vec{a}) + (\vec{v} \% m\vec{v}) = \vec{r} \% m\vec{a} = \vec{r} \% \vec{F}$$

"Teorema de conservación del momento angular"

$$\text{Si } \vec{L}\,' = \vec{r} \% \vec{F} = \text{cuando} \begin{cases} \vec{r} = 0 \\ \vec{F} = 0 \\ \vec{r}\,\psi\,\vec{F} \end{cases} \quad \text{entonces } \vec{L} = \text{cte.}$$

$\vec{r}\,\psi\,\vec{F}$ (posición paralelo - antiparalelo a la fuerza) sucede en fuerzas planetarias

2. Dos cuerpos en interacción

2.a. Centro de masas

Supongamos dos cuerpos : cuerpo 1 (m_1 $\vec{r}_1$) cuerpo 2 (m_2 $\vec{r}_2$)
Se define el **centro de masas** de este sistema como un punto dado por la siguiente expresión :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

El centro de masas es un punto intermedio que está más cercano al cuerpo con mayor masa. Si el sistema se mueve, el centro de masas también lo hace, originándose las siguientes expresiones mediante derivación de la anterior :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\ \vec{r} \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

2.b. Comportamiento dinámico

Supongamos dos cuerpos (1 y 2) interactuando entre sí.

① $m_1\vec{a}_1 = -\vec{F}$

② $m_2\vec{a}_2 = \vec{F}$

① + ② = $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$

$\vec{a}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2} = 0$ Siempre que se cumpla la ley de acción - reacción.

Supongamos dos partículas definidas por los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

La posición relativa viene dada por un vector resultado de la diferencia de los dos, y es la posición de una partícula tomando como origen la otra.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Lo mismo ocurre con la velocidad y la aceleración :

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$
$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

Tomemos otra vez el caso inicial :

① $m_2(m_1\vec{a}_1) = m_2(-\vec{F}) \rightarrow m_2m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{F}$

② $m_1(m_2\vec{a}_2) = m_1(\vec{F}) \rightarrow m_1m_2\vec{a}_2 = m_1\vec{F}$

② - ① $\rightarrow m_1m_2(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \vec{F}(m_1m_2) \rightarrow m_1m_2\vec{a} = (m_1m_2)\vec{F} \rightarrow \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{a} = \vec{F}$

$\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2} = \mu$ = masa relativa

$$\mu\ \vec{a} = \vec{F}$$

Interpretación

El movimiento de dos partículas en interacción es equivalente al de una sola partícula si se toma como masa la relativa (μ).

3. Movimientos planetarios. Historia.

La mayoría de civilizaciones antiguas tenían conocimientos de astronomía (Egipcios, Mesopotámicos...). Los primeros modelos conocidos se remontan a la época de esplendor del Imperio Griego (grandes filósofos y matemáticos). El primero fue el de Aristóteles, aunque fue aceptado por la mayoría de los pensadores.

* Aristóteles (s. IV - III a. C.)

Propone un modelo geocéntrico : la Tierra es el centro del universo y los demás cuerpos giran en torno a ella en movimientos circulares (perfección circular). Los periodos eran distintos : el Sol y las estrellas tardaban un día en dar una vuelta alrededor de la Tierra, los planetas tenían otros periodos...

* Aristarco (s. IV - III a. C.)

Propone un modelo <u>heliocéntrico</u> : el Sol es el centro del universo. No fue aceptado por el siguiente motivo : si la Tierra girara en torno al Sol tendrían que percibirse efectos de paralelaje sobre las estrellas (el ángulo entre dos estrellas respecto a la Tierra debería ser diferente según la época del año). Pero esto no ocurre porque las distancias entre las estrellas y la Tierra son enormes comparadas con el movimiento de translación de la Tierra.

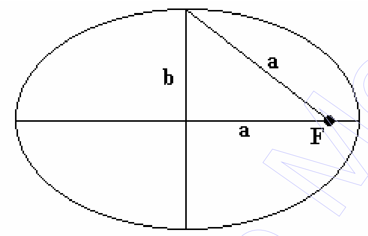
*** Ptolomeo (s. II a. C.)**
Vuelve al modelo <u>aristotélico</u>, pero modificándolo :
La Tierra es el centro del universo, pero los <u>cuerpos</u> celestes no <u>giran</u> directamente respecto a ella, lo hacen <u>en torno a un punto el cual gira alrededor de la Tierra</u>. Así explica los movimientos de los planetas que se ven desde la Tierra.
Este modelo permanece vigente hasta el s. XV, incluso con más complicaciones porque se había descubierto algún satélite.

*** Copérnico (s. XV)**
Propone que todo sería más sencillo de explicar si el <u>Sol</u> estuviera en el <u>centro</u>. Admitía el modelo de Ptolomeo pero cambiando la Tierra por el Sol. No admitía el heliocentrismo por no enfrentarse a la Iglesia.

*** Kepler (s. XVI)**
Este matemático alemán estudió los datos astronómicos de otro astrónomo, Tycho Brahe (había observado los movimientos planetarios durante 20 años), y obtuvo un modelo planetario heliocéntrico basado en tres leyes.

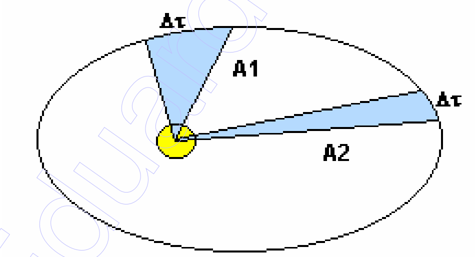
<u>4. Leyes de Kepler</u>

1ª LEY → " Los planetas describen órbitas elípticas respecto al Sol, ocupando éste uno de los focos".
<u>Excentricidad</u> de la elipse : parámetro de 1 a 0 que mide si la elipse se parece a una circunferencia.



$$E = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Los radios extremos son las distancias entre el foco y el punto más alejado y el más cercano a la órbita. Las posiciones de los planetas correspondientes a r_1 y r_2 se les llama perihelio = r_1 y afelio = r_2.



2ª LEY → "Las áreas descritas por el radio vector en tiempos iguales son iguales".
Esta ley obliga a que la velocidad del planeta no sea constante.

3ª LEY → Tal como la formuló Kepler : " $T^2 = K \cdot r_m^3$ "
Tal como se cumple estrictamente : $\mathbf{T^2 = K \cdot a^3}$
T = periodo (s) r_m = radio medio (m) a = semieje mayor
K = constante no universal (depende de las masas de los cuerpos)

5. Ley de gravitación universal (Newton)

Supongamos dos cuerpos materiales separados una cierta distancia medida desde sus centros de masas. Estos cuerpos interaccionan ejerciéndose fuerzas de atracción :

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

G = constante de gravitación universal = 6,67 · 10^{-11}. $G = \frac{4\pi^2}{K(M+m)}$

- **Deducción de la Ley de Gravitación Universal a partir de las leyes de Kepler**

Supongamos un planeta que gira en órbita circular respecto al Sol con un radio r. El centro de masas está casi en el Sol (dada su gran masa), por lo que permanece prácticamente inmóvil y el planeta moviéndose.

$$F = \mu \cdot a_c$$

$$a_c = \omega^2 r \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad a_c = \frac{4\pi^2}{T^2}r \qquad \mu = \frac{Mn}{M+m}$$

$$F = \frac{Mm}{M+m}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

$$T^2 = Kr^3$$

$$F = \frac{Mm}{M+m}\cdot\frac{4\pi^2}{Kr^3}r = \frac{4\pi^2}{K(M+m)}\cdot\frac{Mm}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = G\frac{Mm}{R^2}$$

Cuando un cuerpo es mucho mayor que otro en masa se realiza lo siguiente : M + m φ M

6. Fuerzas conservativas. Energía potencial

Se denominan fuerzas conservativas a aquellas que tienen asociada una función espacial que se denomina energía potencial, de tal forma que el trabajo que realizan entre dos puntos extremos (A y B), sea cual sea la trayectoria, se cumple que $\mathbf{W = E_{P(A)} - E_{P(B)}}$.
Esto lo cumplen las fuerzas gravitatorias, electrostáticas, y elásticas.
Las que no lo cumplen, o sea, las no conservativas, son las magnéticas, las derivadas de motores, máquinas o músculos, y el rozamiento.

- **Fórmula aproximada de la energía potencial gravitatoria**

Supongamos un cuerpo de masa m, lanzado hacia arriba hasta una altura h y atraído hacia la Tierra con una fuerza de gravedad g.

$E_{P(A)} - E_{P(B)} = F \cdot D \cdot \cos\sigma = mg \cdot h \cdot \cos 180° = -mgh$
$E_{P(A)} - E_{P(B)} = -mgh$
$0 - E_{P(B)} = -mgh \quad \rightarrow \quad \mathbf{E_{P(B)} = mgh}$

Es aproximada porque el peso disminuye al ascender, y aquí lo suponemos constante, por lo que sólo sirve para alturas pequeñas.

7. Energía mecánica. Conservación y variación

Se define la energía mecánica como la suma de la energía cinética más la energía potencial :

$$E = E_C + E_P$$

- **Conservación**

Supongamos un cuerpo que se desplaza únicamente sometido a fuerzas conservativas.

Según el Teorema de la fuerzas vivas, se cumple siempre que : $W = \Delta E_C = E_{C(B)} - E_{C(A)}$

Si las fuerzas son conservativas, también se cumple que : $W = E_{P(A)} - E_{P(B)}$

Luego : $E_{C(B)} - E_{C(A)} = E_{P(A)} - E_{P(B)} \quad \rightarrow \quad E_{C(B)} + E_{P(B)} = E_{C(A)} + E_{P(A)}$

$$E_B = E_A$$

Se mantiene la energía mecánica, aunque cambien la cinética y la potencial.

- **Variación**

Supongamos un cuerpo que se encuentra sometido a fuerzas conservativas y no conservativas.

$W_{total} = \Delta E_c = W_C + W_{NC} \qquad W_C = -\Delta E_P$

$W_{total} = -\Delta E_P + W_{NC} \qquad W_{NC} = W_{total} + \Delta E_P = \Delta E_C + \Delta E_P = \Delta\left(E_C + E_P\right) = \Delta E_M$

$$W_{NC} = \Delta E_M$$

8. Campo gravitatorio terrestre : intensidad y potencial

Campo gravitatorio : conjunto de fuerzas gravitatorias que un cuerpo cualquiera es capaz de ejercer sobre otro cuerpo situado en su entorno.

Consideremos la Tierra fija en el origen de coordenadas y un punto exterior de masa m. El campo gravitatorio viene dado por la siguiente expresión :

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

La simetría de este campo viene dada por líneas de campo radiales y dirigidas hacia el centro de la Tierra (representación geométrica).

Intensidad de campo gravitatorio : fuerza que se ejerce sobre una masa unidad (1 Kg) a cualquier distancia.

$$I_g = E_g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} \text{ (N/kg.)}$$

Aceleración de gravedad : aceleración con la que un cuerpo cae a la Tierra

$F = m \cdot a \quad \rightarrow \quad G\frac{Mm}{r^2} = m \cdot g \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$

- **Fórmula exacta de la energía potencial gravitatoria**

Consideremos la Tierra fija en el origen de coordenadas y un punto exterior de masa m moviéndose sobre el eje X desde la posición r hasta el infinito.

$\Delta W = E_{pi} - E_{pf}$

$$W = \int F \cdot dx \cdot \cos\ 180^\circ = -\int_r^\infty G\frac{Mm}{x^2} \cdot dx = -GMm\int_r^\infty \frac{dx}{x^2} = GMm\left[\frac{1}{x}\right]_r^\infty = 0 - \frac{GMm}{r}$$

Por convenio, se supone que la $E_{pf} = 0$

$$E_P = -G\frac{Mm}{r}$$

<u>**Potencial gravitatorio**</u> : energía potencial dividida entre la masa m.

$$V_g = \frac{E_P}{m} = -\frac{GM}{r} \qquad \text{(Jul./kg.)}$$

9. Movimientos de cuerpos sometidos a fuerzas gravitatorias : satélites, cohetes...

Consideramos un cuerpo de masa M en el centro de coordenadas y otro cuerpo de masa m en otro lugar cualquiera. M>>m, luego M se supone fijo respecto al centro de masas. La energía mecánica de m es : $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ que puede ser : E = 0, E > 0 y E < 0 ; por lo que se dan tres casos :

❶ Condición de escape

r → ∞, luego m se aleja infinitamente

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\infty} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E \geq 0$$

- **E = 0** : mínima energía posible para escapar

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$ <u>velocidad mínima de escape</u> ó segunda velocidad cósmica

El tipo de trayectoria que se corresponde con esta velocidad es una rama de parábola.

- **E > 0**

La trayectoria de escape dibuja una rama de hipérbola.

❷ Atrapado

- **E < 0**

El tipo de trayectoria es elíptica.

Energía correspondiente a la órbita circular

Se tiene que cumplir la ley de Newton :

$$F = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r} \qquad \frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ velocidad de puesta en órbita circular o primera velocidad cósmica

- Energía mecánica correspondiente a la órbita circular

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} \qquad E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{r}$$

Para órbitas elípticas todas las fórmulas de órbitas circulares son válidas, cambiando r por a (semieje mayor).

En todas las trayectorias anteriores se conserva la energía (si no se consideran rozamientos) y es igual en todos los puntos de la trayectoria.