

TEMA I

1. Espacios vectoriales
2. Combinaciones lineales
3. Dependencia e independencia lineal
4. Bases
5. Rango de un conjunto de vectores
6. Transformaciones elementales
7. Método de Gauss

1. Espacios vectoriales

1. 1. Definición

Un espacio vectorial es una estructura algebraica que se compone de dos conjuntos y de dos operaciones que cumplen 8 propiedades.

Conjuntos

$E = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}$ vectores

$R = \{r, s, t, \dots\}$ reales

Operaciones

Interna $\vec{a} \in E$
 $\vec{b} \in E$ $\vec{a} + \vec{b} \in E$ suma de vectores

Externa $r \in R$
 $\vec{a} \in E$ $r \cdot \vec{a} \in E$ producto de real por vector

Propiedades

1	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$\forall \vec{a} \in E$ $\forall \vec{b} \in E$
2	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	$\forall \vec{a} \in E$ $\forall \vec{b} \in E$ $\forall \vec{c} \in E$
3	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	$\forall \vec{a} \in E$ $\vec{0} =$ vector nulo de E
4	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	$\forall \vec{a} \in E$ $-\vec{a}$ es el vector opuesto de \vec{a}
5	$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$	$\forall r \in R$ $\forall \vec{a} \in E$ $\forall \vec{b} \in E$
6	$(r + s) \cdot \vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$	$\forall r \in R$ $\forall s \in R$ $\forall \vec{a} \in E$
7	$r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$	$\forall r \in R$ $\forall s \in R$ $\forall \vec{a} \in E$
8	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	$\forall \vec{a} \in E$

1. 2. Propiedades en un espacio vectorial

1	$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$	$\forall \vec{a} \in E$
2	$r \cdot \vec{0} = \vec{0}$	$\forall r \in R$
3	$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$	$\forall \vec{a} \in E$
4	Si $r \cdot \vec{a} = \vec{0}$	ó bien $r = 0$ ó bien $\vec{a} = \vec{0}$

1. 3. Ejemplo : Los espacios vectoriales $E = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
 $\vec{a} \in E$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ Ej. : $\vec{a} = (-1, 7, 2)$

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$r \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

Vector nulo de \mathbb{R}^3 : $\vec{0} = (0, 0, 0)$

Opuesto de $(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3)$

2. Combinaciones lineales

2.1. Definición

E es un e. v. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$

Se dice que $\vec{a} \in E$ es una **combinación lineal** de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$ si existen números reales r_1, r_2, \dots, r_p tales que $\vec{a} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_p\vec{a}_p$.

r_1, r_2, \dots, r_p se llaman coeficientes del vector \vec{a} respecto de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$.

2. 2. Definición

Se dice que $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son un **sistema generador** (s. g.) de E si **cualquier** vector de E se puede poner como combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$. Ej. :

$$(x, y) = r_1(-1, 3) + r_2(2, 1)$$

$$-r_1 + 2r_2 = x \quad -r_1 + 2r_2 = x$$

$$3r_1 + r_2 = y \quad \frac{-6r_1 - 2r_2 = -2y}{-7r_1 = x - 2y} \quad r_1 = (-x + 2y)/7 \quad r_2 = (3x + 4)/7$$

$$(10, 20) = 30/7(-1, 3) + 50/7(2, 1)$$

3. Dependencia e independencia lineal

3. 1. Definición

E es un e. v. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son **linealmente independientes** si de la igualdad $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_p\vec{a}_p = \vec{0}$ se deduce necesariamente que $r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_p = 0$.

3. 2. Definición

E es un e. v. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son **linealmente dependientes** si la igualdad $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_p\vec{a}_p = \vec{0}$ puede ser también cierta aún en el caso de que algún $r_j \neq 0$.

Ejemplos $E = \mathbb{R}^3$

① $(1, 2, -1), (0, 3, -2), (0, 0, 4)$ son linealmente independientes

$$r_1 \cdot (1, 2, -1) + r_2 \cdot (0, 3, -2) + r_3 \cdot (0, 0, 4) = (0, 0, 0)$$

$$r_1 = 0 \quad r_1 = 0$$

$$2r_1 + 3r_2 = 0 \quad r_2 = 0$$

$$-2r_1 - 2r_2 + 4r_3 = 0 \quad r_3 = 0$$

② $(1, 2, -1)$ $(0, 3, -2)$ $(4, -1, 2)$ son linealmente dependientes

$$r_1 \cdot (1, 2, -1) + r_2 \cdot (0, 3, -2) + r_3 \cdot (4, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

$$r_1 + 4r_3 = 0$$

$$r_1 = -4r_3$$

$$2r_1 + 3r_2 - r_3 = 0$$

$$-8r_3 + 3r_2 - r_3 = 0$$

$$3r_2 - 4r_3 = 0$$

$$r_2 = 3r_3$$

$$-r_1 - 2r_2 + 2r_3 = 0$$

$$4r_3 - 2r_2 + 2r_3 = 0$$

$$-2r_2 + 6r_3 = 0$$

r_1	r_2	r_3
0	0	0
-4	3	1
20	-15	-5

3. 3. Teorema

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son linealmente dependientes \Leftrightarrow si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los restantes

4. Bases

4. 1. Definición

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ son una **base** de E si :

① $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ son un sistema generador de E $\Leftrightarrow \forall \vec{a} \in E$ existen números reales r_1, r_2, \dots, r_p tales que $\vec{a} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_p\vec{a}_p$.

② $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow t_1\vec{a}_1, t_2\vec{a}_2, \dots, t_p\vec{a}_p = \vec{0}$ obliga a que $t_1 = t_2 = \dots = t_p = 0$

4. 2. Ejemplos

① $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ forman una base de \mathbb{R}^3 : **base canónica**.

- ¿Son un sistema generador de \mathbb{R}^3 ? Sea $(x, y, z) \in E$

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$(2, -3, 7) = 2(1, 0, 0) - 3(0, 1, 0) + 7(0, 0, 1)$$

- ¿Son linealmente independientes?

$$t_1(1, 0, 0) + t_2(0, 1, 0) + t_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

② $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$ $\vec{a}_2 = (1, 0, 1)$ $\vec{a}_3 = (0, 2, 1)$ forman una base de \mathbb{R}^3

- ¿Son un sistema generador de \mathbb{R}^3 ? Sea $(x, y, z) \in E$

$$(x, y, z) = r_1(1, -1, 0) + r_2(1, 0, 1) + r_3(0, 2, 1)$$

$$r_1 + r_2 = x \quad r_2 + r_3 = x + y \quad r_2 = -x - y + 2z$$

$$-r_1 + 2r_3 = y \quad -r_2 - r_3 = -z \quad r_1 = 2x + y - 2z$$

$$r_2 + r_3 = z \quad r_3 = x + y - z$$

- ¿Son linealmente independientes?

$$t_1(1, 0, 0) + t_2(0, 1, 0) + t_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$t_1 + t_2 = 0$$

$$-t_1 + 2t_3 = 0 \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

$$t_2 + t_3 = 0$$

4. 3. Propiedad

En un espacio vectorial E todas sus bases tienen el mismo número de vectores.

4. 4. Definición

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial E y se escribe $\dim E$ al número de vectores cualquiera de sus bases.

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 \quad \dim \mathbb{R}^3 = 3 \quad \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

4. 5. Teorema

Sea $\dim E = n$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$ entonces se cumple :

- ❶ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son linealmente independientes $\Rightarrow p \leq n$
- ❷ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son linealmente independientes y $p = n \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ es una base de E
- ❸ $p > n \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ son linealmente dependientes

4. 6. Definición

Si $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ es una base de E y si $\vec{a} \in E$ se puede poner como $\vec{a} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n$ entonces r_1, r_2, \dots, r_n son coeficientes de vector \vec{a} respecto de la base $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

5. Rango de un conjunto de vectores

5. 1. Definición

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p \in E$

Se llama **rango** del conjunto de vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ al máximo número de vectores linealmente independientes que podemos encontrar en él.

5. 2. Ejemplo

Rango $\{(-1, 3, 0) (2, 4, 1) (-8, -6, 3)\} = 2$

$(-1, 3, 0)$ y $(2, 4, 1)$ $(-8, -6, 3) = 2(-1, 3, 0) - 3(2, 4, 1)$

$r_1(-1, 3, 0) + r_2(2, 4, 1)$

$$-r_1 + 2r_2 = 0 \quad r_1 = 0$$

$$3r_1 + 4r_2 = 0 \quad r_2 = 0$$

Un único vector es l. i. excepto si es el nulo.

Una sucesión de vectores en la que esté el nulo es l. d.

Una sucesión de vectores en la que haya uno repetido es l. d.

Una sucesión de vectores en la que haya un múltiplo de uno de ellos es l. d.

6. Transformaciones elementales

6. 1. Definición

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in E$

Hacer una **transformación elemental** en este conjunto es hacer alguno de los siguientes cambios :

- ❶ Cambiar el orden de dos vectores.
- ❷ Cambiar un vector por el que resulta de multiplicar ese vector por un número cualquiera distinto de cero.
- ❸ Cambiar un vector por el que resulta de sumar a ese vector algunos cualquiera de los otros multiplicado por un número cualquiera.

6. 2. Ejemplo

$$\begin{array}{ccccc} (3, 1, 0) & (-1, 2, 1) & (-1, 2, 1) & (-1, 2, 1) & (-1, 2, 1) \\ (-1, 2, 1) & \rightarrow (3, 1, 0) & \rightarrow (3, 8, 3) & \rightarrow (-6, -18, -6) & \rightarrow (-6, -18, -6) \\ (3, 8, 3) & (3, 8, 3) & (3, 1, 0) & (3, 1, 0) & (5, 11, 4) \end{array}$$

6. 3. Propiedad

Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ y $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ dos conjuntos de vectores de E con la particularidad de que el segundo se ha obtenido del primero mediante la aplicación de algunas transformaciones elementales. Entonces se verifica :

- ❶ Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ son l. i. $\Leftrightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ son l. i.
- ❷ Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ son l. d. $\Leftrightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ son l. d.
- ❸ $\text{Rango } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} = \text{Rango } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$

7. Método de Gauss

7. 1. Definición

Una **matriz** de m filas y n columnas es un cuadro formado por $m \cdot n$ números reales colocados de la forma siguiente :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las m filas son vectores de \mathbb{R}^n = vectores fila

Las n columnas son vectores de \mathbb{R}^m = vectores columna

7. 2. Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

4 vectores fila de \mathbb{R}^3 : $(2, 0, -1)$, $(4, -2, 3)$, $(0, 0, 2)$ y $(3, 1, -5)$

3 vectores columna de \mathbb{R}^4 : $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Se suele trabajar con vectores fila

7. 3. Definición

Una matriz escalonada por filas es aquella en la que el número de ceros que preceden al primer elemento no nulo de cada fila es mayor que en la fila de encima.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. 4. Propiedad

En una matriz escalonada por filas, el rango del conjunto de vectores fila coincide con el número de filas no nulas.

$$\text{Rango } (1, 2, 0, 1, 3) (0, 3, 1, 0, 4) (0, 0, 0, 1, 1) (0, 0, 0, 0, 2) = 4$$

$$\text{Rango } (1, 3, 0, 1) (0, 0, 5, 0) (0, 0, 0, 2) (0, 0, 0, 0) (0, 0, 0, 0) = 3$$

7. 5. Método de Gauss

Es un procedimiento para calcular el rango de cualquier conjunto de vectores. Consiste en dar los siguientes pasos :

- ❶ Se forma una matriz cuyas filas sean los vectores del conjunto dado.
- ❷ Se efectúan transformaciones elementales sobre los vectores fila hasta conseguir que la matriz quede escalonada por filas.
- ❸ Entonces, según las propiedades 6. 3. y 7. 4., El rango del conjunto inicial de vectores coincide con el número de filas no nulas de la matriz que ha quedado escalonada por filas.